

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note  $\Gamma$  sa courbe représentative.

### A ► Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = -2\ln x - xe + 1.$$

1. Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$ .
3. Montrer que dans  $[0,5 ; 1]$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule notée  $\alpha$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à 0,1 près.
4. En déduire le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

### B ► Étude de la fonction $f$

1. Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
2. Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$ .
3. Donner le tableau de variations de  $f$ .
4. Tracer  $\Gamma$ .